Сценарий применения теории двойственности при планировании производства в отрасли

Получено: 07.07.2020 Поступило после рецензирования: 03.08.2020 Принято: 17.08.2020

УДК 330.4, 338.2 JEL C61, D21, L59, A22 DOI 10.26425/2658-3445-2020-3-3-28-33

Ершов Анатолий Тихонович
Канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001- 6638-2601, *e-mail: ate2505@rambler.ru*

Губарева Елена Алексеевна
Канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002- 5135-6555, *e-mail: gubel@inbox.ru*

Нольде Евгений Львович
Канд. физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0001- 6337-3072, *e-mail: elnolde@yandex.ru*

Ефимова Марина Владимировна
Ст. преп., ФГБОУ ВО «Государственный университет управления», г. Москва, Российская Федерация
ORCID: 0000-0002- 9485-5426, *e-mail: 6044664@gmail.com*

АННОТАЦИЯ

Задача составления оптимального плана производства продукции для предприятия, имеющего ограниченные запасы ресурсов, и решение задачи расшивки узких мест производства только для одного предприятия имеют ограниченный интерес. Новые технические возможности, обусловленные объемами и скоростями передачи и обработки данных, позволяют решать новые задачи, в которых в полной мере может быть использован аппарат теории двойственности.

В статье рассмотрена задача планирования оптимального объема производства компании (фирмы, отрасли, министерства), которая структурно имеет некоторый координационный (управляющий) центр и сеть предприятий (филиалов), которые могут находиться в разных регионах и никак не связаны друг с другом. Для каждого из филиалов известна своя технологическая матрица расходов ресурсов на выпуск продукции, запасы ресурсов, ожидаемая прибыль от реализации единицы продукции каждого вида.

Предложен итерационный алгоритм нахождения планов производства для каждого из предприятий, при реализации которых суммарная прибыль фирмы может быть увеличена. По этому алгоритму, используя классическую постановку задачи оптимального планирования производства, центр находит оптимальный план производства для каждого филиала. Далее, для каждого из них центр, решая задачу расшивки узких мест производства, определяет объемы поставок дефицитных для предприятия ресурсов. Центр поставляет предприятиям дефицитные ресурсы и формирует новый скорректированный план выпуска продукции для каждого из предприятий. При невозможности поставок дефицитных ресурсов для удовлетворения потребностей всех предприятий отрасли предлагаются варианты наиболее перспективных моделей планирования, при которых суммарная прибыль всех предприятий отрасли будет наибольшей.

При переходе на цифровые методы управления производством реализация предлагаемых сценариев планирования становится реальной.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Двойственные оценки ресурсов, линейное программирование, область устойчивости двойственных оценок, оптимальный план, планирование производства, прибыль предприятия, расшивка узких мест производства, суммарная прибыль отрасли.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Ершов А.Т., Губарева Е.А., Нольде Е.Л., Ефимова М.В. Сценарий применения теории двойственности при планировании производства в отрасли//E-Management. 2020. № 3. С. 28–33.

БЛАГОДАРНОСТИ

Публикация была подготовлена по проекту № 2 в рамках договора пожертвования от 01 марта 2019 г. № 1154.

Scenario for applying the duality theory when planning production in the industry

Received: 07.07.2020 Revised: 03.08.2020 Accepted: 17.08.2020

Anatoliy Ershov
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, State University of Management, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001- 6638-2601, *e-mail: ate2505@rambler.ru*

Elena Gubareva
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, State University of Management, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002- 5135-6555, *e-mail: gubel@inbox.ru*

Evgeny Nolde
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor, State University of Management, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0001- 6337-3072, *e-mail: elnolde@yandex.ru*

Marina Efimova
Senior lecturer, State University of Management, Moscow, Russia
ORCID: 0000-0002- 9485-5426, *e-mail: 6044664@gmail.com*

ABSTRACT

The task of drawing up an optimal production plan for an enterprise with limited resources and problem solution of bridging production bottlenecks for only one enterprise are of limited interest. New technical capabilities due to the volume and speed of data transmission and processing, allow you to solve new problems in which the apparatus of the duality theory can be fully used.

The authors consider the problem of planning the optimal production company (firm, industry, ministry) volume, which structurally has a certain coordinating (managing) center and a network of enterprises (branches), which can be located in different regions, and are not connected with each other. Each of the branches has its own technological matrix of resource costs for output, resource reserves, expected profit from the sale of each type of product unit.

An iterative algorithm for finding production plans for each of the enterprises is proposed, when implementing which the total profit of the company can be increased. The Center finds the optimal production plan for each of the enterprises according to this algorithm and using the classical formula of the optimal production planning problem. Further, for each of them, the Center, solving the problem of resolving production bottlenecks for each of the enterprise, determines the supply volumes of resources scarce. The Center supplies scarce resources to enterprises and forms a new adjusted output plan for each of the enterprises. If it is impossible to supply scarce resources to meet the needs of all enterprises in the company, the options for the most promising planning models are offered, under which the total profit of all enterprises in the company will be the greatest.

The implementation of the planning scenarios proposed below becomes real when switching to digital production management methods.

KEYWORDS

Area of stability of dual estimates, dual resource estimates, enterprise profit, expansion of production bottlenecks, linear programming, optimal plan, production planning, total industry profit.

FOR CITATION

A.T. Ershov, E.A. Gubareva, E.L. Nolde, M.V. Efimova. Scenario for applying the duality theory when planning production in the industry (2020) *E-Management*, 3 (3), pp. 28–33. DOI 10.26425/2658-3445-2020-3-3-28-33

ACKNOWLEDGEMENTS

The publication was prepared under the project No. 2 within the donation contract No. 1154 dated on March 1, 2019.

Задача составления оптимального плана производства продукции для предприятия, имеющего ограниченные запасы ресурсов, давно уже стала азбукой задач исследования операций. Основополагающей работой в этом направлении является работа «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» Л.В. Канторовича [1960]. Напомним, что Л.В. Канторович является единственным советским (и российским в новейшей истории) математиком, получившим Нобелевскую премию в области экономики за цикл работ, связанных с наилучшим использованием ресурсов при производстве продукции. Далее, предложенные им идеи развивались во многих странах и по разным направлениям [Гольштейн, Юдин, 1966; Карандаев, 1976; Карандаев и др., 2002; Колемаев и др., 2008]. Одним из таких направлений является задача расшивки узких мест производства. Решение задачи расшивки узких мест производства только для одного предприятия имеет ограниченный интерес. Применение такой постановки задачи для планирования производства работ большой компанией (министерством) становится возможным только при широком использовании методов цифровой экономики и при условии решения задачи централизации и децентрализации управления в цифровом обществе [Горелов, Ерешко, 2018]. Важно отметить, что реализация предлагаемого в статье сценария планирования работ [Писарева, Перекальский, 2016] возможна только при полном переходе на цифровые методы управления производством [Козырев, 2018; Китова, Брускин, 2018].

Новые технические возможности, обусловленные казавшимися еще недавно фантастическими, объемами и скоростями передачи и обработки данных, позволяют формулировать и решать новые задачи, в которых в полной мере можно использовать весь аппарат теории двойственности.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что некоторая большая компания (фирма, министерство) имеет координационный центр, (далее – центр), и некоторое количество предприятий, расположенных в разных городах и действующих по планам, поступающим из центра. Каждое предприятие использует некоторый набор ресурсов, которые оно в необходимом объеме приобретает на месте и (или) может частично получить из центра. Используя эти ресурсы и обладая соответствующими технологиями, каждое предприятие может выпускать некоторый ассортимент продукции. Выпускаемая предприятием продукция может реализовываться как на местном рынке, так и поставляться в другие регионы. Далее будем называть эти предприятия филиалами. Обозначим общее число филиалов через K, а каждому филиалу присвоим индекс k так, что индекс $k=1,\dots,K$. Каждый филиал может выпускать N^k видов продукции, используя M^k видов ресурсов, которые имеются у каждого из них.

Для каждого из филиалов известна своя технологическая матрица расходов ресурсов на выпуск продукции, запасы ресурсов, ожидаемая прибыль от реализации единицы продукции каждого вида.

Введем обозначения:

$X^k = (x^k_1, x^k_2, \dots, x^k_n)^т$ – матрица-столбец (верхний индекс «т» обозначает транспонирование). Это вектор выпуска продукции k-м филиалом;

$B^k = (b^k_1, b^k_2, \dots, b^k_m)^т$ – матрица-столбец запасов ресурсов у k-го филиала. Для упрощения обозначений здесь и далее в подобных записях n и m используются вместо N и M^k соответственно;

$C^k = (c^k_1, c^k_2, \dots, c^k_n)$ – матрица-строка коэффициентов удельной прибыли;

A^k – технологическая матрица $A^k=||a^k_{ij}||$ размера $(m \times n)$. Элементы a^k_{ij} этой матрицы показывают расход i-го ресурса на выпуск единицы продукции j-го вида в k-м филиале. Обозначив через Z^k функцию прибыли для k-го филиала, получаем для этого филиала следующую оптимизационную задачу (задачу линейного программирования):

$$Z^k = C^k X^k \to \max, \tag{1}$$

$$A^k X^k \le B^k, \tag{2}$$

$$X^k \ge 0. \tag{3}$$

Задача (1)–(3) является классической задачей определения плана выпуска продукции, обеспечивающего максимальную прибыль для одного предприятия. Отметим, что для того, чтобы составить и так кратко записать задачу планирования производства для конкретного предприятия, на нем должна отработать группа проектировщиков, состоящая из экономистов, математиков, инженеров, технологов, маркетологов и других специалистов. Эта группа должна: во-первых, определить ассортимент ресурсов и количество ресурсов каждого вида, имеющихся в распоряжении предприятия; во-вторых, оценив все возможные при производстве издержки и последующий ожидаемый доход от реализации произведенной продукции, рассчитать коэффициенты удельной прибыли для матрицы-строки C^k; в-третьих, изучив все технологические процессы по производству предполагаемых к выпуску видов продукции и учитывая все региональные тарифы и ограничения на условия производства, рассчитать все удельные коэффициенты технологической матрицы A^k. Так как мы рассматриваем фирму, состоящую из нескольких примерно однотипных предприятий, то для каждого из этих предприятий (филиалов) под руководством и под контролем центра должна быть проведена такая подготовительная работа. Центр не может считать объединение всех филиалов одним большим предприятием, так как каждый из них имеет свои, специфические для своего региона, условия производства, свои ресурсы, свой рынок сбыта. Но центр должен так скоординировать работу всех филиалов, обеспечивая их дефицитными ресурсами, чтобы в итоге вся фирма имела наибольшую суммарную прибыль. На наш взгляд, центр может действовать по следующему сценарию.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СЦЕНАРИЯ

Первый шаг. Центр запрашивает и получает от каждого своего филиала полную информацию о запасах ресурсов, технологическую матрицу, вектор удельной прибыли. Для каждого филиала центр составляет задачу вида (1)–(3), решает эту задачу и проводит анализ полученного оптимального для k-го филиала плана.

Обозначим это оптимальное решение через матрицу-столбец $X^{k0} = (x^{k0}_1, x^{k0}_2, \dots, x^{k0}_n)^{т}$, а соответствующее этому оптимальному решению максимальное значение целевой функции – Z^k_{max}. Известно, что при реализации оптимального плана какие-то ресурсы используются полностью, а некоторые остаются недоиспользованными. Те ресурсы, которые использованы полностью, принято называть дефицитными. У рачительного хозяина возникает естественное желание, не меняя вошедшие в оптимальный план технологии, вовлечь в производство те ресурсы, по которым есть остаточные запасы.

Второй шаг. Для каждого из филиалов центр составляет задачу, двойственную к задаче (1)–(3). В матричной форме эта задача имеет вид:

$$F^k = (B^k)^{т}\, Y^k \to \min, \tag{4}$$

$$(A^k)^{т}\, Y^k \geq (C^k)^{т}, \tag{5}$$

$$Y \geq 0, \tag{6}$$

где $Y^k = (y^k_1, y^k_2, \dots, y^k_m)^{т}$ – матрица-столбец неизвестных двойственной задачи. Компоненты y^k_i этого столбца неизвестных принято называть двойственными оценками ресурсов в задаче (1)–(3). Центр решает задачу (4)–(6).

Обозначим через $Y^{k0}=(y^{k0}_1, y^{k0}_2, \dots, y^{k0}_m)^{т}$ оптимальное решение задачи (4)–(6). Из теорем двойственности [Гольштейн, Юдин, 1966; Карандаев, 1976; Колемаев и др., 2008] известно, что если компонента y^{k0}_i оптимального решения двойственной задачи строго больше нуля, то есть $y^{k0}_i > 0$, то соответствующий i-й ресурс в задаче (1)–(3) полностью использован, то есть является дефицитным. Если же ресурс имеет остаток, то его оценка y^{k0}_i равна нулю. Известно также, что компоненты y^{k0}_i оптимального решения двойственной задачи являются не просто индикатором дефицитности ресурса, но еще и показывают скорость возрастания целевой функции (1) в задаче (1)–(3) при увеличении запасов дефицитного ресурса. Все эти свойства пары двойственных задач центр использует на следующем шаге расчетов.

Третий шаг. Для каждого филиала центр составляет так называемую задачу расшивки «узких мест производства» [Карандаев и др., 2002]. По сути дела задача заключается в определении центром таких объемов поставок каждому филиалу дефицитных для него ресурсов, при которых приращение максимума его прибыли, то есть значения Z^k_{max}, будет наибольшим.

Обозначим через $T^k=(t^k_1, t^k_2, \dots, t^k_m)^{т}$ – матрицу-столбец поставок центром k-му филиалу дополнительных объемов ресурсов. Отметим, что в этом столбце положительные значения имеют только те компоненты, которые соответствуют дефицитным (полностью используемым) ресурсам. Обозначим через W^k величину прироста максимума прибыли Z^k_{max}, который может быть получен k-м филиалом при использовании им дополнительных поставок дефицитных ресурсов. Получаем следующую задачу расшивки узких мест производства для k-го филиала.

$$W^k = (Y^{k0})\, T^k \to \max, \tag{7}$$

$$Q^{-1}\,(B^k + T^k) \geq 0, \tag{8}$$

$$T^k \geq 0. \tag{9}$$

Обсудим подробнее задачу (7)–(9). Целевая функция (7) в развернутой форме имеет вид:

$$W^k = y^{k0}{}_1 t^k{}_1 + y^{k0}{}_2 t^k{}_2 + \ldots + y^{k0}{}_m t^k{}_m. \tag{10}$$

В этой сумме положительными будут только те слагаемые, которые соответствуют дефицитным ресурсам. Для таких слагаемых оба множителя и $y^{k0}{}_i$ и $t^k{}_i$ будут больше нуля, а их произведение ($y^{k0}{}_i t^k{}_i$) показывает величину прироста максимума прибыли в задаче (1)–(3), если исходный запас i-го ресурса будет увеличен на $t^k{}_i$ единиц. Все сказанное относительно слагаемых $y^{k0}{}_i t^k{}_i$ функции (7) остается справедливым и для таких значений дополнительных объемов ресурсов $T^k=(t^k{}_1, t^k{}_2, \ldots, t^k{}_m)^т$, для которых остаются неизменными значения компонент матрицы-столбца $Y^{k0}=(y^{k0}{}_1, y^{k0}{}_2, \ldots, y^{k0}{}_m)^т$. Как известно, множество таких векторов T^k определяется неравенством (8). Множество решений неравенства (8) называют областью устойчивости двойственных оценок $Y^{k0} = (y^{k0}{}_1, y^{k0}{}_2, \ldots, y^{k0}{}_m)^т$ задачи (4)–(6) или областью устойчивости оптимального набора базисных неизвестных $X^{k0} = (x^{k0}{}_1, x^{k0}{}_2, \ldots, x^{k0}{}_n)^т$ задачи (1)–(3). Через Q^{-1} в уравнении (8) обозначена квадратная матрица ($m\times m$), которую принято называть обращенным базисом. При решении задачи (1)–(3) симплексным методом система неравенств (2) посредством введения дополнительных (балансовых) неизвестных сводится к системе уравнений. В первой симплекс-таблице коэффициенты при дополнительных неизвестных образуют единичную матрицу ($m\times m$). В процессе решения задачи симплексным методом эта единичная матрица преобразуется и в последней симплекс-таблице на тех позициях, на которых в первой таблице находилась единичная матрица, возникает матрица Q^{-1}. Это означает, что процесс преобразований системы уравнений симплексным методом тождественен умножению этой системы (в матричной форме) на матрицу Q^{-1} слева. Смысл условия (9) очевиден. Так как возможности центра не безграничны, то, как правило, задача (7)–(9) дополняется условием:

$$T^k \leq D^k, \tag{11}$$

где $D^k = (d^k{}_1, d^k{}_2, \ldots, d^k{}_m)^т$ – матрица-столбец максимально возможных значений дополнительных поставок соответствующих ресурсов, которые центр может предоставить k-му филиалу.

Центр, решая задачу (7)–(9), дополненную условием (11), находит $T^{k0} = (t^{k0}{}_1, t^{k0}{}_2, \ldots, t^{k0}{}_m)^т$ – матрицу-столбец поставок k-му филиалу дефицитных для него ресурсов. Центр находит новый, скорректированный с учетом решения задачи расшивки узких мест производства, план выпуска продукции. Обозначим этот план через $X^{k*} =(x^{k*}{}_1, x^{k*}{}_2, \ldots, x^{k*}{}_n)^т$. Рассчитывается этот план по формуле:

$$X^{k*} = Q^1 (B^k + T^{k0}). \tag{12}$$

Четвертый шаг. Центр поставляет k-му филиалу дополнительно те ресурсы и в тех объемах, которые определены значениями координат вектора T^{k0}. Центр ставит перед k-м филиалом задачу по выполнению плана X^{k*}. Ожидаемая прибыль при выполнении плана X^{k*} становится равной:

$$Z^{k*} = C^k X^{k*}. \tag{13}$$

Эта прибыль будет больше чем прибыль $Z^k{}_{max}$, полученная при оптимальном решении X^{k0} задачи (1)–(3), на величину $W^k = (Y^{k0})T^{k0}$.

Пятый шаг. Описанная процедура составления оптимальных планов производства для каждого филиала с использованием только его собственных ресурсов и последующая корректировка этих планов с поставками центром филиалам дефицитных ресурсов проводится для всех K филиалов, при условии, что у центра имеется достаточно ресурсов для обеспечения всех филиалов дефицитными для них ресурсами. Суммарная прибыль, которую фирма могла получить по первоначальным оптимальным планам, составляет величину $\sum_{k=1}^{K} Z^k_{\max}$. Решив задачу расшивки узких мест производства для каждого из своих филиалов, фирма принимает решение об обеспечении их необходимыми дефицитными ресурсами. В результате фирма получит прибыль, величина которой будет равна:

$$\sum_{k=1}^{K} Z^k_{\max} + \sum_{k=1}^{K} W^k . \tag{14}$$

Если у центра после этого останутся еще ресурсы, то изложенный выше алгоритм действий с первого по пятый пункты можно принять за первую итерацию и далее повторить все расчеты для определения новых оптимальных планов. Процесс корректировки оптимальных планов можно повторять до тех пор, пока не будут исчерпаны все собственные ресурсы филиалов или пока это будет разумно.

Если руководство фирмы, проанализировав задачи расшивки узких мест производства для всех филиалов, приходит к выводу, что центр не сможет удовлетворить потребности в дефицитных ресурсах все филиалы, то руководство фирмы для задачи расшивки узких мест производства может отобрать лишь часть филиалов, для которых прирост максимума прибыли будет наибольшим.

В заключение отметим, что в МИУ – ГАУ – ГУУ (ФГБОУ ВО «Государственный университет управления») задачу расшивки узких мест производства активно внедрял в программы учебных дисциплин ветеран ГУУ И.С. Карандаев [Карандаев И.С., 1976; Карандаев И.С., Малыхин В.И., Соловьев В.И., 2002; Колемаев В.А. и др., 2008]. На наш взгляд, современные технические средства позволяют успешно решать эти задачи на практике в реальном времени.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. (1966). Новые направления в линейном программировании. М.: Советское радио. 524 с.

Горелов М.А., Ерешко Ф.И. (2018). О моделях централизации и децентрализации управления в цифровом обществе // Цифровая экономика. № 1 (1). С. 37–45.

Канторович Л.В. (1960). Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М.: «Наука». 760 с.

Карандаев И.С. (1976). Решение двойственных задач в оптимальном планировании. М.: «Статистика». 88 с.

Карандаев И.С., Малыхин В.И., Соловьев В.И. (2002). Прикладная математика. М.: ИНФРА-М. 256 с.

Китова О.В., Брускин С.Н. (2018). Цифровая трансформация бизнеса // Цифровая экономика. № 1 (1). С. 20–25.

Козырев А.Н. (2018). Цифровая экономика и цифровизация в исторической ретроспективе // Цифровая экономика. № 1 (1). С. 5–19.

Колемаев В.А. и др. (2008). Математические методы и модели исследования операций / Под ред. Колемаева В.А. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 592 с.

Писарева О.М., Перекальский В.А. (2016). Сценарное моделирование в практике отраслевого стратегического планирования // Научно-технические ведомости. СПбГПУ: Экономические науки. № 4 (246). С. 238–251.

REFERENCES

Gol'shtein E.G. and Yudin D.B. (1966), *New directions in linear programming* [*Novye napravleniya v lineinom programmirovanii*], Sovetskoe radio, Moscow, USSR. (In Russian).

Gorelov M.A. and Ereshko F.I. (2018), "On models of centralization and decentralization of management in a digital society" ["O modelyakh tsentralizatsii i detsentralizatsii upravleniya v tsifrovom obshchestve"], *Digital Economy* [*Tsifrovaya ekonomika*], no. 1 (1), pp. 37–45. (In Russian).

Kantorovich L.V. (1960), *Economic calculation of the best use of resources* [*Ekonomicheskii raschet nailuchshego ispol'zovaniya resursov*], Nauka, Moscow, USSR. (In Russian).

Karandaev I.S. (1976), *The solution to the dual problems in the optimal planning* [*Reshenie dvoistvennykh zadach v optimal'nom planirovanii*], Statistika, Moscow, USSR. (In Russian).

Karandaev I. S., Malykhin V. I. and Solov'ev V. I. (2002), *Applied mathematics* [*Prikladnaya matematika*], INFRA-M, Moscow, Russia (In Russian).

Kitova O. V. and Bruskin S. N. (2018), "*Digital business transformation"* ["*Tsifrovaya transformatsiya biznesa"*], *Digital Economy* [*Tsifrovaya ekonomika*], no. 1 (1), pp. 20–25. (In Russian).

Kozyrev A. N. (2018), "Digital economy and the digitalization in the historical retrospective" ["Tsifrovaya ekonomika i tsifrovizatsiya v istoricheskoi retrospektive"], *Digital Economy* [*Tsifrovaya ekonomika*], no. 1 (1), pp. 5–19. (In Russian).

Kolemaev V.A. [et al.] (2008), *Mathematical methods and models of operations research* [*Matematicheskie metody i modeli issledovaniya operatsii*], pod red. Kolemaeva V.A., UNITY-DANA, Moscow, Russia. (In Russian).

Pisareva O.M. and Perekal'skii V.A. (2016), "Scenario modeling in the practice of industry strategic planning" ["Stsenarnoe modelirovanie v praktike otraslevogo strategicheskogo planirovaniya"], *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Economics* [*Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SpbGPU. Ekonomicheskie nauki*], no. 4 (246), pp. 238–251. (In Russian).